

## Riešenie sústav lineárnych rovníc pomocou matíc a determinantov

Za sústavu lineárnych rovníc považujeme súbor  $n$  rovníc, ktorý obsahuje  $n$  neznámych.

### 1. **Riešenie pomocou matíc – Gaussovou eliminačnou metódou**

Každú sústavu rovníc musíme upraviť do nasledovného tvaru, ku ktorému vieme bez problémov napísať príslušnú maticu koeficientov neznámych.

Napríklad sústava 3 lineárnych rovníc má mať tvar:

$$\begin{aligned}a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= c_1 \\a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= c_2 \\a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= c_3\end{aligned}$$

Maticu, ktorú vytvoríme z koeficientov pri neznámych  $x, y, z$  sa nazýva matica sústavy.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Maticu, ktorú vytvoríme pripojením absolútnych členov k matici sústavy, nazývame rozšírenou maticou sústavy.

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{array} \right)$$

Ak chceme sústavu riešiť, snažíme sa upraviť maticu sústavy v rozšírenej sústave na trojuholníkový tvar tak, aby prvky pod diagonálou boli nulové. V prípade, že na ľavej strane rozšírenej matice dostaneme jednotkovú maticu, hodnoty na pravej strane sú riešením sústavy rovníc. Ak nemáme jednotkovú maticu, tak riešenia vyčísľujeme od posledného riadku.

#### **Príklad:**

Riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned}8x + 2y + 3z - 5u &= -25 \\x + y + z + u &= 4 \\-4x - 3y + z - u &= -19 \\3x + 7y + 8z + 3u &= 0\end{aligned}$$

Napíšeme si koeficienty do rozšírenej matice a budeme ju upravovať

$$\begin{aligned}&\left( \begin{array}{cccc|c} 8 & 2 & 3 & -5 & -25 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ -4 & -3 & 1 & -1 & -19 \\ 3 & 7 & 8 & 3 & 0 \end{array} \right)^1 \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 8 & 2 & 3 & -5 & -25 \\ 0 & 6 & 5 & 13 & 57 \\ -4 & -3 & 1 & -1 & -19 \\ 3 & 7 & 8 & 3 & 0 \end{array} \right)^2 \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 8 & 2 & 3 & -5 & -25 \\ 0 & 6 & 5 & 13 & 57 \\ 0 & -4 & 5 & -7 & -63 \\ 3 & 7 & 8 & 3 & 0 \end{array} \right)^3 \sim \\&\sim \left( \begin{array}{cccc|c} 8 & 2 & 3 & -5 & -25 \\ 0 & 6 & 5 & 13 & 57 \\ 0 & -4 & 5 & -7 & -63 \\ 0 & 50 & 55 & 39 & 75 \end{array} \right)^4 \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 8 & 2 & 3 & -5 & -25 \\ 0 & 6 & 5 & 13 & 57 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -15 \\ 0 & 50 & 55 & 39 & 75 \end{array} \right)^5 \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 8 & 2 & 3 & -5 & -25 \\ 0 & 6 & 5 & 13 & 57 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -15 \\ 0 & 0 & 5 & -26 & -150 \end{array} \right)^6 \sim \\&\sim \left( \begin{array}{cccc|c} 8 & 2 & 3 & -5 & -25 \\ 0 & 6 & 5 & 13 & 57 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 27 & 135 \end{array} \right)\end{aligned}$$

1. miesto čísla 1 potrebujeme nulu. Aby som ju dostala musím celý prvý riadok prenasobiť číslom  $-1/8$  a pripočítať k riadku 2 (2.r. =  $-1/8 \cdot 1.r. + 2.r.$ ) a celý riadok následne na to prenasobíme číslom 8 (aby sme odstránili zlomky)
2. miesto čísla  $-4$  musíme dostať nulu. Prvý riadok predelíme dvomi a pripočítame ku riadku 3 (3.r. =  $1/2 \cdot 1.r. + 3.r.$ ). A následne prenasobíme celý riadok číslom 2, aby sme odstránili zlomky
3. miesto čísla 3 musíme dostať 0, takže prenasobíme prvý riadok  $-3$  a pripočítame ho ku štvrtému riadku, ktorý sme pred tým prenasobili 8 (4.r. =  $-3 \cdot 1.r. + 8 \cdot 4.r.$ )

4. miesto čísla -4 potrebujeme nulu, preto musíme druhý riadok prenásobiť dvomi a pripočítať ku tretiemu riadku, ktorý sme prenásobili tromi (3.r. = 2\*2.r. + 3\*3.r.) a predelíme tento riadok piatimi, aby sme riadok zjednodušili
5. miesto čísla 50 potrebujem nulu a preto urobím nasledovnú úpravu: 4.r.=50\*2.r.-6\*4.r. Následne predelíme číslom 16
6. posledný krok. Miesto čísla 5 potrebujeme 0, preto odčítame 3. a 4.riadok

Takže riešením bude:  $27u = 135, \quad u = 5$

$$5z + 5 = -15, \quad z = -4$$

$$6y + 5(-4) + 13.5 = 57, \quad y = 2$$

$$8x + 2.2 + 3.(-4) - 5.5 = -25, \quad x = 1$$

$$P = \{[1, 2, -4, 5]\}$$

### **Podmienky riešiteľnosti sústavy lineárnych rovníc**

Sústava lineárnych rovníc je riešiteľná práve vtedy, keď matica a rozšírená matica sústavy majú rovnakú hodnotu  $h$ . Pri  $h = n$  existuje práve jedno riešenie sústavy. Pri  $h < n$  existuje nekonečne veľa riešení.

### **2. Riešenie pomocou determinantov – Cramerovým pravidlom**

Determinantom matice sústavy nazývame determinant, ktorý je vytvorený z koeficientov pri neznámych. Vráťme sa k sústave 3 lineárnych rovníc z predchádzajúcej časti a vytvorme jej

$$\text{determinant. } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ak je determinant rôzny od nuly, potom má sústava práve jedno riešenie  $[x, y, z] = \left[\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}, \frac{D_z}{D}\right]$ , kde  $D_x, D_y, D_z$  sú determinanty, ktoré vzniknú z determinantu  $D$  tak, že nahradíme príslušný stĺpec pravou stranou rovníc.

Cramerovo pravidlo sa k praktickému riešeniu sústavy  $n$  rovníc s  $n$  neznámymi príliš nehodí, lebo vyžaduje výpočet  $n + 1$  determinantov  $n$  – tého stupňa. Je preto vhodnejšie používať Gaussovu eliminačnú metódu.

#### **Príklad:**

$$\begin{aligned} \text{Pomocou Cramerovho pravidla vypočítajte} \quad & x - y + 2z = 7 \\ & 2x - 3y + 5z = 17 \\ & 3x - 2y - z = 12 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 1 = 6$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 17 & -3 & 5 \\ 12 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 17 & -3 & -1 \\ 12 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 17 & -1 \\ 12 & -5 \end{vmatrix} = 7 \cdot 13 + 1 \cdot (-73) = 18$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 17 & 5 \\ 3 & 12 & -1 \end{vmatrix} = -12 \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 17 \\ 3 & -2 & 12 \end{vmatrix} = 6$$

Daná sústava má práve jedno riešenie

$$\left[x = \frac{18}{6} = 3, \quad y = \frac{-12}{6} = -2, \quad z = \frac{6}{6} = 1\right] \text{ t.j. } P = \{[3, -2, 1]\}$$

### **Podmienky riešiteľnosti sústavy lineárnych rovníc**

Ak  $D = 0$  a  $D_i = 0$  pre všetky indexy  $i$ , potom má sústava nekonečne veľa riešení, pretože má najviac  $n - 1$  nezávislých rovníc.

Ak  $D = 0$  a aspoň pre jeden index  $i$  platí  $D_i \neq 0$ , potom si rovnice odporujú a obor pravdivosti  $P = \emptyset$ .