

POSTUPNOSTI A RADY

- 1) Zapište vzorcom pre n -tý člen:
- Postupnosť všetkých prirodzených párnych čísel
 - Postupnosť všetkých prirodzených nepárnych čísel
 - Postupnosť všetkých prirodzených čísel deliteľných číslom 11
 - Postupnosť všetkých prirodzených čísel, ktoré pri delení číslom 5 dávajú zvyšok 1.
- 2) Postupnosť je daná vzorcom pre n -tý člen. Napíšte prvých päť členov danej postupnosti a načrtnite jej graf.
- $a_n = 2n + 1$
 - $a_n = n \cdot 2^{-n}$
 - $a_n = (n - 1) \cdot n$
 - $a_n = \frac{n-1}{n+1}$
 - $a_n = n^2 - 5$
 - $a_n = n \cdot (-1)^{n+1}$
- 3) Postupnosť je daná rekurentne. Vypočítajte prvých 6 členov postupnosti, odhadnite vzorec pre n -tý člen a dokážte jeho správnosť.
- $a_1 = 5; a_{n+1} = a_n + 4$
 - $a_1 = 1; a_{n+1} = a_n + 2n + 1$
 - $a_1 = -1; a_{n+1} = (-1)^{2n+1} \cdot a_n + 2$
 - $a_1 = 2; a_2 = 4; a_{n+1} = \frac{4}{3}(a_n + a_{n-1})$
 - $a_1 = 1; a_2 = 3; a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$
 - $a_1 = -3; a_2 = -1; a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$
- 4) Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich postupností sú rastúce, ktoré sú klesajúce, ktoré nie sú ani rastúce ani klesajúce. Potom svoje tvrdenie dokážte:
- $\{n\}_{n=1}^{\infty}$
 - $\{-2n + 3\}_{n=1}^{\infty}$
 - $\{n^2 + 2n + 4\}_{n=1}^{\infty}$
 - $\{-n^2 + 4n - 4\}_{n=1}^{\infty}$
 - $\{(-1)^n \cdot n\}_{n=1}^{\infty}$
 - $\left\{\frac{n+1}{2n+3}\right\}_{n=1}^{\infty}$
- 5) Rozhodnite, či sú dané postupnosti ohraničené zhora, zdola, ohraničené. Potom svoje tvrdenie dokážte.
- $\{n + 1\}_{n=1}^{\infty}$
 - $\left\{-\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
 - $\{n^2 - 1\}_{n=1}^{\infty}$
 - $\left\{\frac{5n+2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$
 - $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$
 - $\left\{\frac{n+4}{-n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
- 6) Vypočítajte limity daných postupností. (Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich postupností sú konvergentné)
- $\left\{\frac{5}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
 - $\{7\}_{n=1}^{\infty}$
 - $\left\{\frac{4n}{3n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$
 - $\left\{(-1)^n \cdot \frac{1}{5n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
 - $\{3^n\}_{n=1}^{\infty}$
 - $\left\{\frac{n^2+4n-1}{2n^2-n+3}\right\}_{n=1}^{\infty}$
 - $\{1 + (-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$
 - $\{\sqrt{n+2}\}_{n=1}^{\infty}$
 - $\left\{\frac{n^2+4n}{n+3}\right\}_{n=1}^{\infty}$
- 7) Dokážte, že dané tri čísla tvoria tri po sebe idúce členy istej aritmetickej postupnosti. Určte diferenciu.
- $\frac{1999}{2000}; \frac{2999}{2000}; \frac{3999}{2000}$
 - $\sin 60^\circ; \sin 0^\circ; \sin(-60^\circ)$
 - $a^2 - 2; (a + 1)^2; (a + 2)^2, \text{ kde } a \in \mathbb{R}$
- 8) Dokážte, že dané tri čísla tvoria tri po sebe idúce členy istej geometrickej postupnosti. Určte kvocient.
- $\sqrt{5} - \sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5} + \sqrt{2}$
 - $\frac{1999}{2000}; \frac{1999}{4000}; \frac{1999}{8000}$
 - $\sin 2x; \cos x; \frac{1}{2} \cot x; \text{ kde } x \in (0; \pi)$
 - $b + 1; b^2 + 2b + 1; b^3 + 3b^2 + 3b + 1; \text{ kde } b \in \mathbb{R}$
- 9) Ak pripočítame k daným číslam -6, 2, 26 reálne číslo x , dostaneme prvé tri členy geometrickej postupnosti. Určte, ktoré číslo musíme pripočítať. Potom určte prvý člen a kvocient geometrickej postupnosti, ktorá takto vznikne.

- 10) V aritmetickej postupnosti je $a_1 = 20, d = 4$.
- Koľký člen sa rovná číslu 100?
 - Koľký člen sa rovná číslu 150?
- 11) V geometrickej postupnosti je $a_1 = 64, q = \frac{1}{2}$. Koľký člen sa rovná číslu $\frac{1}{32}$?
- 12) Určte prvý člen a diferenciu aritmetickej postupnosti, v ktorej platí:
- $a_4 = 9; a_{10} = 21$
 - $a_1 + a_3 = 2; a_2 + a_7 = -8$
 - $2a_2 - a_3 = 20; a_4 - 5a_1 = -95$
 - $a_3 = 2a_4; a_2 = -a_8$
 - $a_2 - a_1 = 6; a_{20} - a_{18} = 15$
 - $a_4 + a_5 + a_7 + a_8 = 10; a_{21} : a_1 = 2$
 - $a_1 + a_2 = 5; a_1^2 + a_2^2 = 13$
 - $a_3 + a_5 = 8; a_3^2 - a_5^2 = 32$
 - $a_4 + a_5 = 4; a_4 \cdot a_5 = -5$
- 13) Určte prvý člen a kvocient geometrickej postupnosti, v ktorej platí:
- $a_2 = 1,5; a_5 = 40,5$
 - $a_2 = 16; a_4 = 1$
 - $a_1 + a_2 - a_4 = -110; a_2 + a_3 - a_5 = -220$
 - $a_8 - a_4 = 360; a_7 - a_5 = 144$
 - $a_2 + a_3 = 60; a_1 + a_4 = 252$
 - $a_2 \cdot a_3 = 9; a_2 + a_3 = 10$
- 14) Určte tri reálne čísla väčšie ako 8 a menšie ako 648 tak, aby s danými číslami tvorili päť po sebe nasledujúcich členov: a) aritmetickej postupnosti, b) geometrickej postupnosti.
- 15) Medzi korene kvadratickej rovnice $x^2 - 10x + 16 = 0$ vložte štyri čísla tak, aby spolu s vypočítanými koreňmi vzniklo šesť po sebe nasledujúcich členov: a) aritmetickej postupnosti, b) geometrickej postupnosti.
- 16) Nájdite dve reálne čísla x, y tak, aby čísla $3, x, y$ tvorili tri po sebe nasledujúce členy geometrickej postupnosti a čísla $x, y, 18$ tvorili tri po sebe nasledujúce členy aritmetickej postupnosti.
- 17) Určte štyri čísla tak, aby prvé tri tvorili tri po sebe nasledujúce členy aritmetickej postupnosti s diferenciou $d = -3$ a posledné tri tvorili tri po sebe nasledujúce členy geometrickej postupnosti s kvocientom $q = \frac{1}{2}$.
- 18) Desiat čísel tvorí aritmetickú postupnosť s diferenciou $d = 3$. Prvé, tretie a siedme číslo tvoria tri po sebe nasledujúce členy geometrickej postupnosti. Určte tieto čísla.
- 19) V aritmetickej postupnosti poznáme prvý člen $a_1 = 18$ a diferenciu $d = -5$. Určte $n \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo $a_n + a_{n+3} = -189$.
- 20) V geometrickej postupnosti poznáme prvý člen $a_1 = \frac{1}{64}$ a kvocient $q = 2$. Určte $n \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo $a_n + a_{2n} = 8200$.
- 21) Súčet troch po sebe idúcich členov geometrickej postupnosti je 9. Prvé číslo necháme, druhé zväčšíme o 12 a tretie číslo zmenšíme o 3. Dostaneme tak tri po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti. Určte pôvodnú trojicu čísel a vykonajte skúšku.
- 22) Tri čísla tvoria tri po sebe nasledujúce členy aritmetickej postupnosti a súčet ich druhých mocnín je 126. Ak prvé číslo zmenšíme trikrát, druhé číslo necháme a tretie číslo zväčšíme štyrikrát, dostaneme tri po sebe idúce členy geometrickej postupnosti. Určte pôvodnú trojicu čísel a vykonajte skúšku.
- 23) Dĺžky strán pravouhlého trojuholníka tvoria tri po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti. Obvod trojuholníka je 96 cm. Vypočítajte dĺžky strán.
- 24) Dĺžky hrán kvádra tvoria tri po sebe idúce členy geometrickej postupnosti. Súčet dĺžok všetkých hrán kvádra je 84 cm. Vypočítajte povrch kvádra, ak viete, že jeho objem je 64 cm^3 .
- 25) V aritmetickej postupnosti je $a_1 = 3, d = 4$. Koľko členov tejto postupnosti musíme sčítať, aby súčet bol väčší ako 250?
- 26) Určte súčet všetkých párnych čísel, ktoré vyhovujú nerovnici $x^2 - 53x + 150 \leq 0$.
- 27) Vypočítajte súčet všetkých prirodzených dvojčiferných čísel.
- 28) V aritmetickej postupnosti je prvý člen $a_1 = 10$ a diferenciu $d = -2$. Vypočítajte člen, ktorý sa rovná jednej tretine súčtu všetkých predchádzajúcich členov.
- 29) V aritmetickej postupnosti určte prvý člen a diferenciu, ak viete že platí:
- $a_6 = -\frac{1}{3}a_{16}; s_{26} = 104$
 - $s_5 = 60; s_{10} = 170$
 - $s_{10} = s_{11} = 165$

30) Daný nekonečný geometrický rad zapíšte pomocou sumy.

a) $3 + 9 + 27 + 81 + \dots$

b) $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}x + \dots$

c) $2 - 4 + 8 - 16 + 32 - \dots$

d) $\frac{3}{x^3} + \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x} + 3 + 3x + 3x^2 + \dots$

31) U daných nekonečných geometrických radov určte prvý člen a kvocient. Rozhodnite, ktoré z daných radov sú konvergentné, ktoré divergentné. Konvergentné rady sčítajte.

a) $\frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \dots$

b) $-\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} - \dots$

c) $\sqrt{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \dots$

d) $2 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{4} + \dots$

e) $\sqrt{5} - \sqrt{3} + 5 - \sqrt{15} + 5\sqrt{5} - 5\sqrt{3} + \dots$

f) $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i$

g) $\sum_{i=1}^{\infty} (\sqrt{5})^{-i}$

h) $\sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1}$

i) $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2-i}$

32) Určte, pre ktoré $x \in \mathbb{R}$ sú dané nekonečné geometrické rady konvergentné a určte ich súčet.

a) $2 + 4x + 8x^2 + 16x^3 + \dots$

b) $x + 4 + (x + 4)^2 + (x + 4)^3 + \dots$

c) $x + 2x + 4x + 8x + \dots$

d) $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - 2x)^i$

e) $\sum_{i=1}^{\infty} (x^2 + 7)^i$

f) $\sum_{i=1}^{\infty} (x + 4)^{2-3i}$

g) $\sum_{i=1}^{\infty} x^{-2i}$

h) $\sum_{i=1}^{\infty} (2 \log x + 3)^i$

i) $\sum_{i=1}^{\infty} 2^i \cdot \sin^i x$

33) Riešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $1 + 3x + 9x^2 + \dots = 10$

b) $2 - 4x + 8x^2 - \dots = 1$

c) $1 + \log x + (1 + \log x)^2 + (1 + \log x)^3 + \dots = -6 \log x$

d) $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \dots = -\frac{1}{3}$

34) Riešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $\sum_{i=1}^{\infty} (4 - 3x)^i = -\frac{1}{2x}$

b) $(x + 1) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (x + 2)^i = \frac{3x+2}{5}$

c) $\sum_{i=1}^{\infty} (x + 2)^{2i} = \frac{1}{3}$

d) $2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2i}} = \frac{x}{x+1} - \frac{x-2}{x-1}$

e) $\sum_{i=1}^{\infty} (3 \log_2 x - 2)^i = \frac{1}{3}$

f) $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - 2 \cos^2 x)^i = \lg x$

35) Dané čísla vyjadrite v tvare zlomku v základnom tvare:

a) $0, \overline{8}$

b) $0, \overline{370}$

c) $1, \overline{032}$

d) $25, \overline{67}$

36) Daný zlomok zapíšte pomocou nekonečného geometrického radu.

a) $\frac{1}{1-\frac{3}{4}}$

c) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{1-x}$, kde $x \in \mathbb{R} \wedge |x| < 1$

37) Vypočítajte:

a) $5 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[8]{5} \cdot \dots$

b) $\frac{n + \frac{n}{3} + \frac{n}{9} + \frac{n}{27} + \dots}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$, kde $n \in \mathbb{N}$

38) Súčet radu $a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$ je 20. Súčet radu $a^2 + a^2q^2 + a^2q^4 + a^2q^6 + a^2q^8 + \dots$ je 80. Určte čísla $a, q \in \mathbb{R}$.

39) „Nekonečná“ špirála sa skladá z polkružníc, polomer prvej polkružnice je 6 cm, polomer každej ďalšej je o $\frac{1}{3}$ menší než polomer predchádzajúcej. Vypočítajte dĺžku špirály.

40) „Nekonečná“ špirála sa skladá z polkružníc, polomer prvej polkružnice je 6 cm, polomer každej ďalšej je trikrát menší než polomer predchádzajúcej. Vypočítajte dĺžku špirály.

41) Nad výškou rovnostranného trojuholníka so stranou a je zostrojený rovnostranný trojuholník, nad jeho výškou je opäť zostrojený rovnostranný trojuholník atď. Postup sa stále opakuje. Určte súčet obsahov všetkých trojuholníkov.

42) Pravouhlému rovnoramennému trojuholníku ABC je vpísaný trojuholník tak, že jeho vrcholy ležia v stredoch strán trojuholníka ABC. Tomuto je vpísaný ďalší podľa tých istých pravidiel. Postup sa neustále opakuje. Aký veľký je súčet obsahov všetkých trojuholníkov, ak odvesna trojuholníka ABC má dĺžku a ?