

## **DETERMINANTY**

Determinant  $n$  – tého stupňa matice  $A$  je číslo  $D$ , vytvorené z  $n^2$  čísiel  $a_{ik}$ , usporiadaných do štvorcovej tabuľky z  $n$  riadkov a  $n$  stĺpcov tvaru

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \Rightarrow$  riadok determinantu

$a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1} \Rightarrow$  stĺpec determinantu

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \Rightarrow$  hlavná diagonála

### **Hodnota determinantu:**

- Determinant prvého stupňa

$$D = |a_{11}| = a_{11}$$

- Determinant druhého stupňa

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

**Príklad 1:** Vyčíslite determinanty:

$$A = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -5 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} x+y & x-y \\ x-y & x+y \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & \log_2 5 \\ \log_5 2 & 1 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$$

- Determinant tretieho stupňa ([Sarrusovo pravidlo](#))

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \\ - (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12})$$

**Príklad 2:** Vyčísľte determinanty:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 4 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

- Determinant n-tého stupňa

Determinant sa rovná súčtu súčinov prvkov ľubovoľného riadku (alebo stĺpca) a k nim príslušných algebraických doplnkov.

$$D = |A| = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

Uvedený súčet nazývame rozvojom determinantu  $|A|$  podľa prvkov  $i$  – toho riadku matice **A**.

### **Algebraický doplnok (kofaktor):**

Pod týmto pojmom budeme rozumieť subdeterminant determinantu  $D$  prislúchajúci k prvku  $a_{ij}$  vynásobený číslom  $(-1)^{i+j}$ .

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot D_{ij}$$

**Príklad 3:** K danému determinantu  $D$  vytvorte subdeterminant, ktorý prislúcha k prvku  $a_{32}$  a potom doplnok  $A_{32}$ .

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

### **Rozvoj determinantu:**

a) podľa  $i$ -tého riadku:  $D = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \dots + a_{in}D_{in}$

b) podľa  $j$ -tého stĺpca:  $D = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \dots + a_{nj}D_{nj}$

Ak máme použiť rozvoj determinantu podľa niektorého riadku (stĺpca), tak sa snažíme získať v danom riadku (stĺpci) čo najviac núl.

### **Pravidlá pre počítanie determinantov**

- Hodnota determinantu sa nezmení, ak v ňom zameníme riadky za stĺpce.
- Hodnota determinantu sa nezmení, ak k ľubovoľnému riadku (stĺpcu) pripočítame (odčítame) ľubovoľný násobok ostatných riadkov (stĺpcov).
- Hodnota determinantu sa rovná nule, ak sú v niektorom riadku (stĺpci) všetky prvky rovné nule.
- Hodnota determinantu sa rovná nule, ak niektorý riadok (stĺpec) je ľubovoľným násobkom iného riadku (stĺpca).
- Hodnota determinantu sa rovná nule, ak má dva riadky (stĺpce) rovnaké.
- Determinant zmení znamienko, ak medzi sebou vymeníme dva riadky (stĺpce) determinantu.
- Pred determinant môžeme vybrať číslo „c“, ktorým je vynásobený niektorý riadok (stĺpec).
- Násobiť determinant číslom „c“, znamená vynásobiť týmto číslom niektorý jeho riadok (stĺpec). (Len jediný riadok alebo stĺpec)
- Determinant trojuholníkovej resp. diagonálnej matice je rovný súčinu prvkov v jej hlavnej diagonále.
- Determinant jednotkovej matice je rovný jednej.