

INVERZNÁ MATICA

Definícia:

Nech \mathbf{A} je štvorcová matica stupňa n . Ak existuje štvorcová matica \mathbf{B} toho istého stupňa n taká, že $\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{E}_n$, kde \mathbf{E}_n je jednotková matica stupňa n , potom túto maticu nazývame **inverznou maticou** k \mathbf{A} a označujeme ju symbolom \mathbf{A}^{-1} .

Matica \mathbf{A} , ku ktorej existuje inverzná matica, sa nazýva **regulárna (invertovateľná)**, v opačnom prípade sa \mathbf{A} nazýva **singulárna**.

Nie ku každej štvorcovej matici existuje inverzná matica. Ľahko ukážeme, že napríklad matica $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nie je regulárna. Hľadáme čísla a, b, c, d tak, aby platilo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Podľa definície súčinu matíc musí platiť pre prvok a_{22} matice napravo $c \cdot 0 + d \cdot 0 = 1$, čo nie je možné.

Vlastnosti:

Nech \mathbf{A}, \mathbf{B} sú regulárne matice stupňa n . Potom

- a) súčin \mathbf{AB} je regulárna matica a platí $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
- b) matica \mathbf{A}^{-1} je regulárna a platí $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$

HODNOSŤ MATICE, EKVIVALENCIA MATÍC

Hodnosťou matice \mathbf{A} rozumieme počet lineárne nezávislých riadkov tejto matice. Označuje sa $h(\mathbf{A})$. Platí: $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T)$ – transponovaná matica má rovnakú hodnosť ako matica pôvodná.

Hodnosť matice sa nemení, ak ju zmeníme elementárnymi úpravami.

Elementárnymi úpravami matice \mathbf{A} nazývame:

1. zmenu dvoch riadkov (stĺpcov)
2. vynásobenie riadka (stĺpca) nenulovým číslom
3. pripočítanie násobku jedného riadka (stĺpca) k inému

Definícia:

Matice \mathbf{A}, \mathbf{B} nazývame **ekvivalentné** a píšeme $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, ak sa dá jedna na druhú previesť pomocou elementárnych úprav.

Pri určovaní hodnosti matice prevádzame maticu pomocou elementárnych úprav na tzv. stupňovú maticu – maticu, ktorej prvý nenulový člen každého riadku má väčší stĺpcový index než prvý nenulový člen predchádzajúceho riadku.

Výpočet inverznej matice

- k zadanej matici, ktorú máme invertovať, pripíšeme sprava jednotkovú maticu rovnakého stupňa
- elementárnymi riadkovými úpravami upravíme vzniknutú maticu tak, aby v ľavej časti (na mieste zadanej matice) vznikla jednotková matica
- v pravej časti matice (na mieste jednotkovej matice) je hľadaná inverzná matica

Príklad: Nájdite inverznú maticu k matici $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Riešenie: Zostavíme maticu rozšírenú o príslušnú jednotkovú maticu a budeme postupne upravovať:

1) 3.r. - (4/3)x2.r., 3x3.r.

2) 1.r. - 5x3.r., 2.r. - 2x3.r.

3) (1/3)x2.r.

4) 1.r. - 2x2.r.

5) (1/4)x1.r.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim^{1)} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \sim^{2)} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & | & 1 & 20 & -15 \\ 0 & 3 & 0 & | & 0 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \sim^{3)} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & | & 1 & 20 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \\ \sim^{4)} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & | & 1 & 14 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \sim^{5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/4 & 14/4 & -11/4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

teda platí: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 14/4 & -11/4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Príklady:

1. Vypočítajte hodnotu nasledujúcich matic:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{pmatrix}$

2. Vypočítajte inverznú maticu A^{-1} k matici A a vykonajte skúšku správnosti:

a) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. Vypočítajte inverznú maticu \mathbf{A}^{-1} k matici \mathbf{A} a vykonajte skúšku správnosti:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 6 & -10 \end{pmatrix}$