Výroky, výrokové formy

Výroková logika je abstraktná teória , stanovujúca pravidlá myslenia, ktoré majú za cieľ logickú správnosť. Logické pravidlá a zákony chápeme skôr ako normy správneho myslenia, ktorými by sa myslenie malo riadiť, ak tomuto mysleniu ide o pravdivosť a logickú správnosť a nie iba o psychologickú presvedčivosť.

Za <u>výroky</u> považujeme oznamovacie vety, ktorými sa zrozumiteľne oznamuje nejaká skutočnosť, ktorá môže byť buď len pravdivá, buď len nepravdivá. Termíny výrok, pravdivostná hodnota výroku, pravdivý výrok, nepravdivý výrok označujú základné pojmy logiky, ktoré nemožno definovať oddelene jeden od druhého.

Medzi charakteristické vlastnosti výrokov patria najmä tieto tri :

a) Každému výroku možno jednoznačne priradiť jednu z dvoch pravdivostných hodnôt „pravda“, „nepravda“
b) Z každého výroku možno vytvoriť nový výrok, ktorý má inú (hovoríme opačnú) pravdivostnú hodnotu než pôvodný výrok
c) Ľubovoľné výroky možno určitým spôsobom spojovať tak, že výsledkom spojenia je vždy zase výrok

Oznamovacie vety, ktoré majú charakter výroku, ale ich pravdivostnú hodnotu zatiaľ nepoznáme, nazývame <u>hypotézy(domnienky).</u> *Vyslovenie hypotézy je nevyhnutnou súčasťou vedeckého skúmania problémov.*

<u>Úlohy:</u>

1. Ktoré z nasledujúcich viet možno považovať za výroky? Výrokom priraďte pravdivostnú hodnotu

a) Prší?
b) Choď a prines loptu!
c) Bratislava je hlavné mesto Slovenskej republiky
d) Bratislava je hlavné mesto Rakúska
e) Riešte nerovnicu!
f) Existuje snežný muž Yetti
g) Základy matematickej logiky
h) Ktoré čísla sú deliteľmi nuly?
i) Narysuj pravouhlý trojuholník, keď sú dané jeho odvesny.
j) Susedné strany pravouhoníka sú zhodné. (Pravouholník má všetky vnútorné uhly sú pravé)
(Pozor na rozhodnutie, najprv si prečítajte nasledujúce vety, a potom sa zamyslite, či táto oznamovacia veta spĺňa vlastnosti výroku, či je jednoznačne formulovaná)
k) Existuje pravouholník, ktorého dve susedné strany sú zhodné.
l) V každom pravouholníku sú každé dve susedné strany zhodné.
m) Nie je tu.
n) $(x + 1)^2 = x^2 + 1$
o) Niekde vo vesmíre existujú iné formy života.
p) Obchod s textilom
q) Národná banka Slovenska
r) Zajtra bude v Dubnici pršať.

2. Nasledujúcim výrokom priraďte pravdivostnú hodnotu „pravda“, „ nepravda“ symbolmi: p (1), n (0)

a) Matematika je veda.
b) Každý štvorec je štvoruholník.
c) Každý štvoruholník je štvorec.
d) $\sin 30° = 2$.
e) Ludolfovo číslo je racionálne číslo.
f) $(-1)^2 = -1$

3. V nasledujúcich súvetiach možno nájsť časti, ktoré sú výrokmi. Nájdite tieto čiastkové výroky a slová, ktoré ich spojujú alebo uvádzajú.

a) Anna sa učí a Viera hrá.
b) $13 > 0$ a $13 < 20$
c) Nie je pravda, že $\sqrt{9} = -3$
d) Toto lietadlo letí z Košíc do Bratislavy priamo alebo (toto lietadlo) pristáva iba na Sliači.
e) Keď číslo 13 je párne, potom 65 je párne číslo
f) Číslo 1001 je deliteľné 13 práve vtedy, keď číslo 143 je deliteľné 13.

4. Zostavte vety, ktoré nie sú z rôznych dôvodov výrokmi. Potom rozhodnite, či sú tieto vety výrokmi:

a) Zotri tabuľu a choď si sadnúť.
b) Keď nemáš čo povedať, mlč.
c) Keď nechceš ísť do kina, pôjdeš už domov?

Operácie s výrokmi

Výrokové premenné budeme symbolicky označovať písmenami . Napr. výrok **A** : 4 = 5
p : Dunaj preteká cez Dubnicu.

<u>Negácia výroku</u> je výrok utvorený z daného výroku popierajúci jeho pravdivosť.
Formálne negáciu výroku **A** budeme označovať ako **A′** alebo $\rceil$**A**.
Najjednoduchšie sa negácia výroku vytvorí pomocou slovného spojenia **„nie je pravda, že ....“**, prípadne pridaním „ne...“ k slovesnému tvaru.
Príklad: Výrok **A**: Mám ostrý nôž. **A′** : Nie je pravda, že mám ostrý nôž.

Nemám ostrý nôž.

Poznámka: V texte sa pre negáciu väčšinou použil znak „ ′ “. Pri používaní ho v primeranej miere nahradzujte aj znakom „ $\rceil$ “.

5. V pravom stĺpci nájdite negáciu výrokov zapísaných v ľavom stĺpci

a) 26 : 2 = 2	Nie je pravda, že 26 : 2 = 2, $26 : 2 > 2$, $26 : 2 \neq 2$
b) Steny našej triedy sú žlté	Steny našej triedy nie sú žlté. Steny našej triedy sú modré.
c) Nie je pravda, že Váh preteká cez Trenčín.	Váh nepreteká cez Trenčín. Váh preteká cez Trenčín
d) Našiel som korunu.	Našiel so päťkorunovú mincu. Nenašiel som korunu.

6. Sformulujte negácie výrokov a určte ich pravdivostné hodnoty.

a) 3 + 7 = 10
b) $\sqrt{31} \neq 1 + \sqrt{21}$
c) Číslo 1025 je druhou mocninou prirodzeného čísla.
d) Nie je pravda, že $\sqrt{24}$ je dvojnásobkom $\sqrt{6}$.
e) Hodnota výrazu 3x – 5 pre číslo x = 7 je 15.

7. V čase, keď ani jeden žiak nemal v škole kalendár z roku 1984, vyslovovali sa hypotézy o tom, na ktorý deň v týždni pripadal 29. február 1984.

H_1: 29.februára 1984 bola nedeľa.
H_2: 29.februára 1984 bola streda.
H_3: 29.februára 1984 nebola nedeľa.
H_4: 29.februára 1984 bol piatok.

Neskôr žiaci overili, že hypotézy H_1, H_4 nie sú pravdivé, H_2, H_3 sú pravdivé. Ktoré z dvojíce hypotéz s rôznymi pravdivostnými hodnotami by ste považovali za dvojicu **výrok – negácia výroku**?

a) H_1 –- H_2 b) H_1 –- H_3 c) H_2 –- H_4 d) H_3 –- H_4

8. Sformulujte čo najstručnejšie tieto výroky. Vyslovte záver :

a) Nie je pravda, že neovládam matematiku.
b) Nie je pravda, že číslo 1001 je prvočíslo
c) Nie je pravda, že $2^4 \neq 4^2$

9. Sformulujte negácie týchto výrokov

a) Nie je pravda, že som povedal, že to nie je pravda.
b) Nie je pravda, že nie je pravda, že som povedal pravdu.

<u>Operácie s výrokmi:</u>

Výroky spájame pomocou výrokových spojok ,tzv. logických operátorov(symbolov, ktoré prikazujú vykonať určitú operáciu).
Používané logické operátory: $\wedge$...konjunktor, $\vee$...disjunktor(nevylučujúci), $\vee\vee$.....vylučujúci disjunktor, ...$\Rightarrow$implikátor, $\Leftarrow$......reimplikátor, $\Leftrightarrow$........ekvivalentor

konjunkcia** je výrok vytvorený z dvoch výrokov A a B spojením pomocou „a“ , „i“, „a tiež“. Označenie **A $\wedge$ B.

disjunkcia** je výrok vytvorený z dvoch výrokov A a B spojením spojkou „alebo“ . Označenie **A $\vee$ B

implikácia** je výrok vytvorený z dvoch výrokov A a B tak, že prvému výroku je predradené slovo „ak“ a druhému výroku „potom“. Označenie **A $\Rightarrow$ B

ekvivalencia** je výrok vytvorený z dvoch výrokov A a B spojením pomocou „vtedy a len vtedy“ , „práve vtedy, keď“, Označenie **A $\Leftrightarrow$ B

alternatíva (v niektorej literatúre ostrá disjunkcia) *je výrok vytvorený z dvoch výrokov A a B tak, že prvému výroku je predradené slovo „buď“ a medzi výroky sa dá spojka „alebo“. Označenie **A $\vee\vee$ B***

Pravdivostné hodnoty negácie výroku a zložených výrokov sú v tabuľke:

A	B	B′(⌉B)	A ∧ B	A ∨ B	A ⇒ B	A ⇔ B	A ∨∨ B
1	1	0	1	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1
0	1		0	1	1	0	1
0	0		0	0	1	1	0

Poznámka: V starších učebniciach sú disjunkcia a alternatíva vymenené. V príkladoch sa alternatíva A ∨∨ B a reimplikátor vyskytuje len zriedka.

10. Vyjadrite stručnejšie tieto výroky a pomenujte ich.

a) 3 je deliteľom 123 a 3 je deliteľom 121.
b) Bratislava leží na Dunaji a Komárno leží na Dunaji.
c) Trenčín leží na Váhu alebo Trenčín leží na Hrone.
d) Nula je nekladné číslo a nula je nezáporné číslo.
e) Ak Ľudovít nestihne autobus, potom Ľudovít príde vlakom.
f) Ak číslo 217 nie je násobkom troch, potom číslo 217 nie je násobkom deviatich.
g) Ak nula je kladné číslo, potom je nula i záporné číslo.

11. Vyjadrite pomocou logických spojok obsah týchto správ o počasí.

a) Neprší ani nefúka vietor.
b) Je zamračené, ale neprší.
c) Dnes sneží, zatiaľ čo včera pršalo.
d) Oteplilo sa, ale napriek tomu je mráz.
e) Husto prší, dokonca aj hrmí.
f) Dážď ustal, ale stále mrholí.

12. Rozhodnite, či spojka „alebo“ má v nasledujúcich vetách vylučovací (výrok je alternatíva) či nevylučovací (disjunkcia) význam.

a) Prší, alebo je zamračené.
b) Zbierame a jeme maliny alebo jahody.
c) Priateľ pricestuje v sobotu vlakom alebo priletí v nedeľu lietadlom .
d) Na tento žreb vyhrám auto alebo chatu.
e) Trnava bude majstrom ligy alebo víťazom pohára.
f) Auto dostalo šmyk alebo mu praskla pneumatika.

13. Žiaci prvého ročníka sa mali stretnúť o 15.30 pri plavárni. O 14.45 sa vedelo:

a) Ak nepríde Karol, nepríde ani Jozef.
b) Mária nepríde bez Heleny.
c) Eva príde , len keď príde Iva, inak nie.
d) Tomáš príde aj s Petrom.
e) Niekto z dvojice Ján, Pavol nepríde.
f) Nikto z dvojice Katka, Emil nepríde.
g) Príde práve jeden z dvojice Peter, Milan.

Vyjadrite vety a) až g) pomocou logických spojok; jednoduché výroky označte písmenami a zložené výroky zapíšte symbolicky.

14. Pomenujte nasledujúce výroky a vyjadrite ich v plnom znení :

h) Čísla 35 a 49 sú celočíselnými násobkami čísla 7.
i) Číslo 21 je deliteľné troma a siedmimi.
j) Číslo 35 alebo číslo 37 je prvočíslo.
k) Číslo 12345 je deliteľné troma alebo deviatimi.

15. Dvaja žiaci poznali pojem prvočísla a začali skúmať, ktoré trojciferné čísla sú prvočísla. Zamerali sa na násobky 100 o jedno menšie alebo väčšie.

Prvý žiak vyslovil tieto výroky: $\mathbf{A_1}$ **:** Číslo 199 alebo číslo 201 je prvočíslo
$\mathbf{B_1}$ **:** Číslo 299 alebo číslo 301 je prvočíslo
$\mathbf{C_1}$ **:** Číslo 399 alebo číslo 401 je prvočíslo

Druhý žiak mal iný názor a vyslovil tieto výroky: $\mathbf{A_2}$ **:** Číslo 199 alebo číslo 201 nie je prvočíslo
$\mathbf{B_2}$ **:** Číslo 299 alebo číslo 301 nie je prvočíslo
$\mathbf{C_2}$ **:** Číslo 399 alebo číslo 401 nie je prvočíslo

Rozhodnite o pravdivosti čiastkových výrokov a disjunkcií. Sú pravdivé niektoré z konjunkcií: $\mathbf{A_1 \wedge A_2}$, $\mathbf{B_1 \wedge B_2}$, $\mathbf{C_1 \wedge C_2}$?

16. Prečítajte ako konjunkciu alebo disjunkciu dvoch výrokov tieto matematické zápisy:

a) $-3 < -2 < -1$ b) $10 \leq 7$ c) $11.60 = 66.10 = 660$ d) $\sqrt{1640} \neq 40 + \sqrt{40}$

e) Δ KLM ~ Δ PQR ~ Δ XYZ

17. Zapíšte čo najstručnejšie tieto konjunkcie a disjunkcie a rozhodnite , či sú pravdivé:

a) (3+5).7= 8.7 a 8.7=56 b) $\sqrt{120} < 11$ alebo $\sqrt{120} = 11$

c) $2 > \sqrt{3}$ alebo $2 < \sqrt{3}$ d) $0{,}5 < 0{,}56$ a $0{,}56 < 0{,}7$

18. Prečítajte slovami nasledujúce zápisy a rozhodnite o pravdivosti výrokov, ktoré predstavujú:

($|$......delí, je deliteľom, $3 \mid 18$ čítajte ako 3 delí 18 alebo 3 je deliteľom 18.)

a) $3+4 = 7 \wedge 5 < 6$ b) $6-2 \neq 3 \wedge 2.3=6$ c) $3 \mid 12 \wedge 4 \mid 12$ d) $3 \mid 17 \wedge 3 \mid 5$

e) $7 < 11 \wedge 111 \mid 111$ f) $3 \mid 5 \vee 3 \mid 6$ g) $7 < 9 \vee 7 \mid 8$ h) $3 \neq 3 \vee 3=3$

i) $7.8 = 54 \vee 7 < 8$ j) $7 > 11 \vee 11 < 11$

19. Zložené výroky môžeme spájať do ďalších výrokov pomocou logických operátorov. Prečítajte slovami dané zápisy a rozhodnite o pravdivosti zapísaných výrokov.

a) $(2.3 = 6 \vee 3.4 = 16) \wedge 1 < 2$ b) (5 † 14 $\wedge$ $7 \mid 42$) $\vee$ $2 \neq 2$

c) (5 † 14 $\vee$ $7 \mid 42$) $\wedge$ $2 \neq 2$ d) $(3 < 7 \wedge 7 \mid 11) \wedge 111 \mid 111$

20. Dané výroky napíšte symbolicky (použite znak $|$......delí, je deliteľom **) :**

a) Číslo 262 je deliteľné troma, siedmimi a trinástimi.
b) Číslo 215 je deliteľné piatimi, troma a trinástimi.
c) Číslo 551 je deliteľné troma alebo siedmimi alebo trinástimi.
d) Číslo 339 je deliteľné piatimi alebo jedenástimi alebo trinástimi.
e) Číslo 172 je deliteľné dvoma alebo troma alebo šiestimi alebo ôsmimi.

21. Sformulujte svoj názor, koľko z n výrokov musí byť pravdivých, aby bola pravdivá :

a) konjunkcia všetkých n výrokov b) disjunkcia všetkých n výrokov.

22. Dané výroky napíšte symbolicky :

a) Ak 21 je deliteľné siedmimi, tak 1111 je deliteľné tromi.
b) Súčin čísel 2 a 3 je rovný 6 práve vtedy, keď aj ich súčet .

23. Svedok vyslovil na súde výrok: „ Ak je obžalovaný A vinný, potom je vinný i obžalovaný B“. Predstavte si štyri možné výroky o vine obžalovaných A a B

a) A je vinný, B je vinný b) A je vinný, B nie je vinný
c) A nie je vinný, B je vinný d) A nie je vinný, B nie je vinný

V ktorých prípadoch a) až d) priznáte svedkovi, že povedal pravdivý výrok a že ho nemožno upodozrievať z nepravdivého svedectva?

24. Mama povedala svojmu synovi Petrovi: „ Ak budeš dobrý, dostaneš zmrzlinu“. Sú štyri možnosti:

a) Peter bol dobrý, dostal zmrzlinu b) Peter bol dobrý, nedostal zmrzlinu
c) Peter nebol dobrý, dostal zmrzlinu d) Peter nebol dobrý, nedostal zmrzlinu

V ktorých prípadoch a) až d) vyslovila mama pravdivý výrok?

25. Janko povedal: „ Ak bude zajtra pekné počasie, prídem.“

Sú štyri možnosti: a) Je pekné počasie, Janko prišiel b) Je pekné počasie, Janko neprišiel
c) Nie je pekné počasie, Janko prišiel d) Nie je pekné počasie, Janko neprišiel

V ktorých prípadoch a) až d) Janko dodržal slovo?

26. Rozhodnite, akú pravdivostnú hodnotu majú tieto výroky. Napíšte ich symbolicky.

a) Keď 3.6 = 17, potom 4.6 = 24 b) Keď 31 je párne číslo, potom 39 je párne číslo.
c) Keď 231 je deliteľné siedmimi, potom 3231 je deliteľné 21. d) Keď $-6 < -5$, potom $30 > 25$.

27. Rozhodnite, akú pravdivostnú hodnotu majú tieto výroky :

a) Bratislava je hlavným mestom Slovenska práve vtedy, keď je sídlom centrálnych úradov SR.
b) Číslo 2 je koreňom rovnice $x^2 + 4 = 0$ vtedy a len vtedy, keď $\sqrt{4} = -2$.
c) 56 je deliteľné 14 práve vtedy, keď 56 je deliteľné 2 a 7.(Zapíšte symbolicky)
d) $27 < 10 \Leftrightarrow 26 < 9$.

28. Rozhodnite, akú pravdivostnú hodnotu majú tieto výroky :

a) Číslo π možno napísať desatinným číslom 3,14159 alebo zlomkom $\frac{22}{7}$.
b) Číslo *e* je väčšie 2 a zároveň menšie než 3.
c) Ak je číslo deliteľné tromi, potom jeho ciferný súčet je deliteľný tromi.
d) Číslo je deliteľné šiestimi práve vtedy, keď je deliteľné dvanástimi.

29. Hostitelia pozvali na večierok päť osôb A,B,C,D,E z rôznych miest. Ich odpovede možno vyjadriť týmito výrokmi:

a) Príde A a B b) Príde B alebo C c) Ak príde C, príde D d) E príde práve vtedy, keď príde D

Nakoniec v dôsledku nepriaznivého počasia neprišiel nikto. Rozhodnite, ktorí z nich neporušili sľub daný hostiteľom, t.j. ktoré z výrokov a) až d) sú pravdivé

30. Katka si vyberá oblečenie a módne doplnky. zo siedmich ponúkaných predmetov A,B,C,D,E,F,G si zaumienila vybrať najviac štyri. Jej vlastné myšlienky, rady matky a predavačiek možno vyjadriť týmito výrokmi:

a) Ak si vezme , vezme si nutne E a G. b) Ak si nevezme A, vezme si B. c) Vezme si F alebo G

d) C si vezme práve vtedy keď si vezme D e) B a G si vezme práve vtedy, keď si vezme C alebo F

f) Ak si vezme B a nevezme C, potom si nevezme E a vezme si F..

Nakoniec si Katka odnáša len predmety A a B. Rozhodnite, ktoré rady rešpektovala a ktoré nie?

Výrazy zostavené z výrokových premenných, zátvoriek a logických operátorov tak, že po dosadení ľubovoľných výrokov za výrokové premenné dostaneme výrok, sa v logike nazývajú <u>výrokové formuly.</u>
Výrokové formuly, ktoré nadobúdajú hodnotu „ pravda“ pri všetkých kombináciách pravdivostných hodnôt svojich premenných sa nazývajú <u>tautológie</u>
Výrokové formuly, ktoré nadobúdajú hodnotu „ nepravda“ pri všetkých kombináciách pravdivostných hodnôt svojich premenných sa nazývajú <u>kontradikcie</u>
<u>Logicky ekvivalentné výrokové formuly</u> nazveme také formuly ε a ϕ, pre ktoré je výroková formula $\varepsilon \Leftrightarrow \phi$ tautológiou
<u>Splniteľná výroková formula</u> je výroková formula, ktorá aspoň pre jednu kombináciu pravdivostných hodnôt svojich premenných nadobúda hodnotu „pravda“ a aspoň pre jednu kombináciu pravdivostných hodnôt nadobúda hodnotu „nepravda“.

Pravdivostné hodnoty výrokovej formuly zisťujeme spravidla pomocou tabuľky s vhodným záhlavím.

Poznámka: Nezamieňať výrok a výrokovú formulu. Výroková formula môže nadobudnúť rôzne pravdivostné hodnoty, výrok len jedinú.

31. Doplňte pravdivostné hodnoty v stĺpcoch tabuliek:

A	B	A'	$A' \vee B$	$A \Rightarrow B$	$(A' \vee B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

A	B	A'	$A' \Rightarrow B$	$A \vee B$	$(A \vee B)'$	$(A \vee B)' \wedge (A' \Rightarrow B)$
1	1					
1	0					
0	1					
0	0					

Čo môžete povedať o výrokovej formule napísanej v záhlaví posledného stĺpca?

32. Určte typ výrokovej formuly (tautológia, kontradikcia, logická ekvivalencia, splniteľná formula**).**

a) $A \vee A'$ b) $(A')' \Leftrightarrow A$ c) $A \Rightarrow A'$ d) $A' \Rightarrow A$

e) $A \wedge A'$ f) $A \Leftrightarrow A'$ g) $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$ h) $(A' \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \vee B)$

i) $(A' \vee B') \Rightarrow (A \vee B)'$ j) $(A \vee B)' \wedge (A' \Rightarrow B)$ k) $[(A \Rightarrow B) \wedge B] \Rightarrow A$ l) $A \Rightarrow (A' \Rightarrow B)$

m) $(A \wedge B)' \vee (A' \wedge B)$

33. Overte, či nasledujúce výrokové formuly sú tautológie. Ak nie, určte ich typ. Nájdite logicky ekvivalentné výrokové formuly.

a) $(A \Rightarrow B)' \Rightarrow C'$ b) $[A \vee (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \vee B) \vee C]$ c) $[A \wedge (B \wedge C)] \Leftrightarrow [(A \wedge B) \wedge C]$

d) $[A \vee (B \wedge C)] \Leftrightarrow [(A \vee B) \wedge (A \vee C)]$ e) $[A \wedge (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$

f) $[A \Rightarrow (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)]$ g) $[A \Rightarrow (B \wedge C)] \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)]$

h) $[A \Rightarrow (B \Rightarrow C)] \Leftrightarrow [(A \wedge B) \Rightarrow C]$ i) $[A \Rightarrow (B \Leftrightarrow C)] \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow C)]$

j) $[A \Rightarrow (B \Rightarrow C')] \Leftrightarrow (B \wedge C)'$

34. Rozhodnite, či výrokové formuly ε a ϕ sú logicky ekvivalentné:

a) ε: $p \vee r$, ϕ: $\urcorner r \Rightarrow p$ b) ε: $\urcorner(p \Leftrightarrow q)$, ϕ: $\urcorner p \vee q$ c) ε: $\urcorner a \Rightarrow (\urcorner b \wedge c)$, ϕ: $(c \vee a) \Leftrightarrow \urcorner(b \vee c)$

35. Overte, či nasledujúce výrokové formuly sú tautológie(obrátená a obmenená implikácia**).**

a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$ b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B' \Rightarrow A')$

36. Rozhodnite, či sú pravdivé tieto implikácie. Vyslovte obmeny implikácií a obrátené implikácie a určte ich pravdivostné hodnoty.

a) Ak 13 je párne číslo, tak 3.13 je párne číslo.
b) Ak 2^3+1 je prvočíslo, tak 3^8+1 je prvočíslo.

37. Vyslovte obmeny daných implikácií a obrátené implikácie:

a) Ak je konštrukcia urobená presne, tri zostrojené kružnice prechádzajú jedným bodom.
b) Ak je súčin daných čísel párne číslo, tak nie sú obidva činitele párne čísla.
c) Ak nie je daný trojuholník pravouhlý, tak hľadanou množinou bodov nie je kružnica.

38. Vyslovte obmeny daných implikácií a obrátené implikácie s nematematickým obsahom:

d) Keď fúka východný vietor, neprší.
e) Ak je Mesiac v nove, o polnoci je v lese tma.
f) Keď pracujem, nehovorím.
g) Keď nemám dosť vlastných peňazí, požičiavam si ich od priateľa.
h) Keď nie je v izbe dosť svetla, nečítam(v tejto izbe).

39. Vyslovte obmeny daných implikácií o ochrane životného prostredia:

a) Ak má výrobný podnik v prevádzke výkonné zariadenie na pohlcovanie popolčeka, nezvyšuje sa spád popolčeka v okolí podniku.
b) Ak nie je v meste dostatok zelene, zvyšuje sa množstvo CO_2 v ovzduší mesta.
c) Ak sa nežiadúce splodiny výrobného podniku odplavujú vodou, podnik je povinný vybudovať čističku odpadových vôd.
d) Ak podnik nedodržuje zákon o ochrane životného prostredia, platí vysoké pokuty za znečisťovanie prostredia.

Negácia zložených výrokov

$(A \wedge B)' \Leftrightarrow (A' \vee B')$ $(A \vee B)' \Leftrightarrow (A' \wedge B')$ ***(de Morganove pravidlá)***

$(A \Rightarrow B)' \Leftrightarrow (A \wedge B')$ $(A \Leftrightarrow B)' \Leftrightarrow [(A \wedge B') \vee (A' \wedge B)]$

Overte, že hore uvedené výrokové formuly sú tautológie.

40. Vyjadrite stručne negáciu týchto výrokov:

a) Príde Peter alebo Pavol
b) Ak príde Michal, príde Ján.
c) Príde Anna a Hana
d) Karol príde práve vtedy, keď príde Jozef.
e) Máme pivo a minerálky
f) Osviežim sa čajom alebo kávou
g) Ak budem obedovať koláč, dám si čaj.
h) Nie som hladný a nie som smädný
i) Nie som hladný a som smädný
j) Ak dostanem čerstvé ovocie, nekúpim kompót
k) Grapefruity kúpim len vtedy, keď nebudú citróny.

41. Ktorá z výrokových formúl je tautológia, ktorá kontradikcia.(riešte pomocou tabuľky a úpravou výrokovej formuly na jednoduchší tvar)

b) $(A \Rightarrow B')' \Rightarrow (B' \wedge A)'$ b) $[(A \vee B)' \Rightarrow (A \wedge B)']'$

42. V bežeckom preteku nastúpili dvaja reprezentanti. Predpoveď znela: „Atlét A zvíťazí a B bude druhý, alebo A nedokončí pretek a B zvíťazí. Predpoveď sa nesplnila(uvedený výrok neplatí); čo môžete tvrdiť o výsledku preteku?

43. Peter usudzoval, že koreň rovnice bude menší než 10 a väčší než 3, a že keď bude koreň rovnice dvojnásobný, bude to číslo 6. Jeho výrok sa ukázal nepravdivý ; čo zistil o koreni rovnice?

44. Plánoval som, že do Bratislavy poletím lietadlom alebo pôjdem vlakom a ak sa zdržím dva dni, ubytujem sa u známych. Moje zámery sa neuskutočnili. Čo sa stalo?

45. **Vyjadrite negáciu výrokov:** a) $(A \vee B) \Rightarrow C$ b) $(A \wedge B) \Rightarrow C$ c) $A \Rightarrow (B \vee C)$
d) $A \Rightarrow (B \wedge C)$ e) $(A \wedge B) \Rightarrow (C \wedge D)$ f) $(A \wedge B) \Rightarrow (C \vee D)$
g) $A \vee (B' \Rightarrow C)$ h) $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (C \wedge D)$ i) $(A \wedge B)' \Rightarrow (C \vee D)$

46. Vyslovte obmeny výrokov, ktoré opisujú správanie vodičov dodržujúcich pravidlá cestnej premávky:

a) Ak vodič odbočuje k chodníku, dáva znamenie o smere jazdy.
b) Ak vodič vidí prichádzajúci vlak alebo počuje zvukové znamenie prichádzajúceho vlaku, nevchádza na železničný priechod.
c) Keď je vozovka súvisle a dobre osvetlená, nejde vodič s rozsvietenými diaľkovými svetlami.
d) Keď je vozidlo predbiehané, vodič nezvyšuje jeho rýchlosť, ani nezačína sám predbiehať iné vozidlo.
e) Keď vodič stojí s vozidlom na kraji cesty a chce sa znovu rozbehnúť, dáva znamenie o zmene smeru jazdy.

Za <u>kvantifikovaný výrok</u> považujeme tie oznamovacie vety, ktoré udávajú presný počet alebo určitý odhad počtu predmetov, osôb a pod, ktoré majú uvedenú vlastnosť. Slová alebo krátke spojenia, ktoré vyjadrujú vo vete údaj o počte objektov, osôb a pod., nazývame <u>kvantifikátory.</u>

Kvantifikátormi sú číslovky a slová príp. slovné spojenia: žiadny, každý, práve jeden, existuje aspoň jedno,......

<u>Všeobecný kvantifikátor</u> - $\forall$ -vyjadruje, že <u>každý</u> uvažovaný objekt má (alebo žiadny nemá) vlastnosť, o ktorú ide. Okrem slov každý, žiadny sa na tento účel používajú aj slová všetky, ľubovoľný, ktorýkoľvek, ani jeden a pod.
V matematike je účelné vyjadrovať vety so všeobecným kvantifikátorom jednotne, dáva sa prednosť zvratu:
***<u>O každom</u>**...(objekt) **....platí, že**.......(vlastnosť)*

<u>Existenčný kvantifikátor</u> - $\exists$- vyjadruje, že <u>aspoň jeden</u> uvažovaný objekt má (alebo nemá) vlastnosť o ktorú ide. Okrem slov aspoň jeden sa na tento účel používajú slová niektorý, možno nájsť, existuje a pod.
*V matematike sa dáva sa prednosť zvratu: **<u>Existuje</u>** <u>(aspoň jeden)</u> ...objekt<u>.., ktorý</u>........vlastnosť*

47. Nájdite v nasledujúcich vetách kvantifikátory. Doplňte tieto vety vhodnými kvantifikátormi tak, aby boli pravdivými výrokmi.

a) Niektoré prirodzené čísla sú prvočísla
b) Žiadny trojuholník nemá dva tupé uhly.
c) Každému trojuholníku možno opísať práve jednu kružnicu.
d) Existuje aspoň jedno párne prvočíslo.
e) Ťažnice trojuholníka sa pretínajú v jednom bode.
f) V kružnici sú zhodné všetky jej priemery.
f) Štvoruholníky, ktoré majú zhodné uhlopriečky, sú rovnobežníky.

48. V nasledujúcich vetách, ktoré v dôsledku neúplnej formulácie nie sú výrokmi, doplňte na vhodné miesto jedno zo slov „každý, všetky“, alebo „aspoň jeden, niektoré“. Rozhodnite, či po tomto doplnení dostanete výrok a v kladnom prípade určte jeho pravdivostnú hodnotu.

a) Strany štvorca sú navzájom zhodné.
b) Trojuholník je rovnoramenný.
c) Obdĺžniky majú rovnaké obsahy.
d) Trojuholník možno rozdeliť na štyri rovnoramenné trojuholníky.

49. Doplňte nasledujúce vety jedným zo slov „každý“, „aspoň jedno“ a rozhodnite, či vzniknutý výrok je pravdivý resp. nepravdivý.

a) Pre .... prirodzené číslo x platí : $x^2 \geq 0$.
b) Pre .... prirodzené číslo y platí : $y^2 = 1$.
c) Pre .... prirodzené číslo t platí : $t^2 < 0$
d) Pre .... prirodzené číslo w platí : $w^2 = w$.

50. Na číselnej osi (kde sú znázornené čísla, ktoré udávajú počet, t.j. 0,1,2,3,....**)vyznačte obrazy čísel, ktoré udávajú možný počet korunových mincí človeka hovoriaceho pravdivý výrok:**

a) Mám najviac jednu korunovú mincu.
b) Mám aspoň jednu korunovú mincu.

Čo môžeme povedať o počte mincí človeka, ktorý by vyslovil pravdivú konjunkciu týchto dvoch výrokov.

51. Podobne ako v predchádzajúcom príklade vyznačte všetky čísla, udávajúce možné počty stokorún vo vlastníctve človeka, ktorý hovorí pravdivé výroky:

a) Mám aspoň tri stokoruny.
b) Mám aspoň päť, ale najviac desať stokorún.
c) Mám najviac dve alebo aspoň osem stokorún.

Koľko stokorún by mal človek, ktorý by vyslovil pravdivú konjunkciu všetkých troch výrokov a), b), c).

52. Vyjadrite symbolicky nasledujúce výroky (označte p: „Príde otec“, q: „ Príde matka“)

a) Príde aspoň jeden z rodičov.
b) Rodičia neprídu spolu.
c) Žiaden z rodičov nepríde.
d) Príde najviac jeden z rodičov.
e) Príde práve jeden z rodičov.
f) Aspoň jeden z rodičov nepríde.
g) Matka nepríde bez otca.
h) Otec príde, ale matka nie.

<u>Negovanie kvantifikovaných výrokov</u> : pomocou slov“ nieje pravda, že...“ alebo <u>zmenou kvantifikátorov</u>

výrok:	*negácia:*
.... aspoň n	***........najviac n–1......***
........najviac n	***........aspoň n+1.......***
.... práve n	***........najviac n–1 alebo aspoň n+1.......***

∃ (objekt) ***, ktorý je*** (vlastnosť)
(**existuje** (*objekt)* , ***ktorý je*** (vlastnosť))

∀ *(objekt)* **platí, že nie je** (vlastnosť)
(**žiadny** *(objekt)* **nie je**(vlastnosť))

$$[\exists x;\ V(x)]' \Leftrightarrow [\forall x;\ V'(x)]$$

∀ *(objekt* **) platí, že je** (vlastnosť)
(**Pre každý** *(objekt)* **platí, že je** (vlastnosť) **)**

∃ (objekt) ***, ktorý nie je*** (vlastnosť)
(**existuje** (*objekt)* , ***ktorý nie je*** (vlastnosť))

$$[\forall x;\ V(x)]' \Leftrightarrow [\exists x;\ V'(x)]$$

Ukážka negovania výroku A: „Žiadny lichobežník nie je rovnoramenný“
B: „Niektoré zlomky sa nedajú zjednodušiť“

Postup pri negovaní : 1. výrok sformulujeme do podoby, ktorý je v matematike bežný:

A: „O každom lichobežníku platí, že nie je rovnoramenný“
B: „Existuje aspoň jeden zlomok, ktorý sa nedá zjednodušiť“

2. výrok negujeme podľa pravidla negovania:

A′: „Existuje lichobežník , ktorý je rovnoramenný“
B′: „Pre každý zlomok platí, že sa dá zjednodušiť“

3. Môžeme použiť voľnejšie vyjadrenie výrokov A′, B′ napr.

A′: „Dá sa zostrojiť rovnoramenný lichbežník“
B′: „Všetky zlomky sa dajú zjednodušiť“

53. Sformulujte stručné negácie výrokov a na číselnej osi vyznačte rôznymi farbami počty, ktoré vyjadruje výrok a počty, ktoré vyjadruje jeho negácia:

a) Bude nás najviac päť. b) Spadne aspoň jedno jablko c) Nebol podaný žiaden protest

54. Sformulujte negáciu výrokov:

a) Žiadne prvočíslo nie je párne číslo.
b) Dané priamky môžu mať najviac jeden spoločný bod.
c) Rovnica $x^3 - 6x + 4 = 0$ má aspoň jeden reálny koreň.
d) Medzi dvojcifernými prirodzenými číslami je aspoň 25 prvočísel.
e) Všetci nominovaní pretekári sú zdraví.
f) Táto posádka kozmickej lode lietala aspoň 82 dní.
g) Presne pri 133. štarte motor prvý raz naskočil.

55. Použite číselnú os pri formulovaní negácie výroku: „ Rovnica $x^3 - 2x^2 + x = 0$ má práve dva korene“
Porovnajte výsledok s negáciou konjunkcie : „ Rovnica $x^3 - 2x^2 + x = 0$ má aspoň dva korene a zároveň má najviac dva korene“.

56. Rozhodnite, ktoré z daných výrokov a)- e) vyjadrujú charakteristiku rovnakého počasia v siedmich dňoch jedného týždňa:

a) Každý deň pršalo.
b) Najviac šesť dní pršalo.
c) Práve sedem dní pršalo
d) Aspoň jeden deň nepršalo
e) Nie každý deň pršalo

57. Sformulujte negáciu výrokov(postupujte podľa ukážky negovania výrokov A,B):

a) Všetky násobky čísla osem sú párne čísla.
b) Niektoré násobky čísla sedem sú násobkami čísla päť
c) Dá sa zostrojiť štvoruholník, ktorý má päť zo šiestich úsečiek (strán a uhlopriečok) zhodných.
d) Ktorýkoľvek trojuholník má súčet ťažníc väčší než súčet strán.
h) Ani jeden koreň rovnice (x+1).(x – 6) = 0 nie je kladné číslo.
i) Žiadny trojuholník s obvodom rovnajúcim sa 4 nemá obsah väčší než 1.

58. **Rozhodnite o pravdivosti výrokov a ich negácií z predchádzajúceho príkladu.** (Uvedomte si, že výrok obsahujúci existenčný kvantifikátor- existenčná veta - je dokázaný, akonáhle ukážete jeden objekt požadovanej vlastnosti)

59. Sformulujte negáciu , obmenu a obrátenie výrokov a určte ich pravdivostnú hodnotu(pracujte veľmi pozorne, lebo výroky obsahujú niekoľko kvantifikátorov, alebo sú zložené; pri ich negovaní opakujte hore uvedené postupy)**:**

a) Ku každému trojuholníku existuje aspoň jedna kružnica, ktorá je mu opísaná.
b) Existuje šesťuholník, ktorý má aspoň tri tupé vnútorné uhly.
c) Existuje prirodzené číslo, ktoré je deliteľom každého prvočísla.
d) Ak je prirodzené číslo n zložené a nieje druhou mocninou, tak má aspoň štyroch deliteľov.
e) Ak má štvoruholník ABCD aspoň tri strany rovnako dlhé a jeho uhlopriečky sa rozpoľujú, tak je to kosoštvorec alebo štvorec.

60. Medzi nasledujúcimi výrokmi nájdite ekvivalentné výroky a výroky, ktoré majú medzi danými výrokmi svoju negáciu:

a) Neexistujú neomylní učitelia.
b) Každý učiteľ je omylný.
c) Iba omylní ľudia sú učiteľmi.
d) Iba tí ľudia, ktorí nie sú učiteľmi, môžu byť omylní.
e) Existujú omylní učitelia.
f) Žiadny učiteľ nie je neomylný.
g) Žiadny učiteľ nie je omylný.
h) Nielen omylní ľudia sú učiteľmi.

61. Sformulujte negáciu výrokov:

a) Nikto mu nezávidí.
b) Ktosi nám závidí.
c) Každý sa mýli.
d) Nič sme nespozorovali.
e) Niekto prehovoril.
f) Všetci sme odišli.
g) Nikto učený z neba nespadol.
h) Všetci sme nepoučiteľní.
i) Ktokoľvek môže odísť.
j) Nikto nikoho nevidel.

***Výrokové formy** sú oznamovacie vety, ktoré obsahujú premenné a ktoré nie sú výrokmi, ale po dosadení vhodných konštánt za premenné z vopred udanej množiny sa z nich stanú výroky.*
Používame označenia: V(x) ...výroková forma V s premennou x
Každej výrokovej forme priraďujeme tri významné množiny:
***O.........obor premennej,** t.j.súhrn všetkých predmetov, ktorých názvy chceme dosadzovať za premennú x.*
***D........definičný obor výrokovej formy,** t.j. súhrn všetkých predmetov z oboru premennej O, ktorých názov (po dosadení za x) mení V (x) na výrok*
***P........obor pravdivosti výrokovej formy,** t.j. súhrn všetkých predmetov z oboru premennej O, ktorých názov mení V (x) na pravdivý výrok*

Rozlišujte tieto zápisy s premennými: výraz......................po dosadení za premenné dostanete číslo
výrok......................dá sa určiť pravdivostná hodnota
výroková forma..... po dosadení za premenné dostanete výrok

62. Ktoré z nasledujúcich zápisov sú výrazy, výrokové formy , výroky? (pri výrokových formách zvoľte vhodné obory premenných)

a) x je deliteľné troma
b) súčet x+2
c) $y^2 - x^2$
d) $y^2 = x^2$
e) $x+2 < y + 3$
f) (x+2)–(y+3)
g) matka osôb x, y
h) x je matka y
i) 3x –2 = 5x –6
j) Číslo 5 vyhovuje rovnici x+1 = 6
k) Body A,B,C ležia na jednej priamke
l) $x^2 + y^2 \geq 0$
m) Žiadne reálne číslo nevyhovuje nerovnici $x^2 + 1 < 0$

***Operácie s výrokovými formami** robíme tak isto ako s výrokmi. Na spájanie dvoch výrokových foriem používame spojky $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Ponechávame aj rovnaké názvy týchto operácií.*

63. **Zvoľme výrokové formy: A (x) : „ x je deliteľné dvoma“, B (x): „ x je deliteľné šiestimi“ ,** v ktorých premenná x označuje ľubovoľné prirodzené číslo. Sformulujte nasledujúce výrokové formy:
a) $A'(x)$ b) $A(x) \wedge B(x)$ c) $A(x) \vee B(x)$ d) $B(x) \Rightarrow A(x)$ e) $B(x) \Leftrightarrow A(x)$

64. **Dané sú výrokové formy F(x) : „ x je prirodzené číslo“, G (x): „ x je celé číslo“ , H(x) : „ x je kladné číslo“, I (x): „ x je prvočíslo“, J(x) : „ x je deliteľné piatimi“.** Prečítajte pomocou slovného vyjadrenia daných výrokových foriem tieto zložené výrokové formy:
a) $I(x) \vee H(x)$ b) $F(x) \wedge G(x)$ c) $I(x) \Rightarrow J(x)$

65. **Daná je výroková forma V (x) : $x^2 - 6x < 1$, obor premennej x tvoria všetky jednociferné prirodzené čísla.** Dosadzujte postupne za premennú x čísla z oboru premennej a určte, ktoré z týchto prirodzených čísel sú prvkami oboru pravdivosti výrokovej formy V (x) **.**

66. **Znázornite na číselnej osi rôznymi farbami prvky oborov pravdivosti týchto výrokových foriem s premennou $x \in N$: A(x) : $x^2 < 30$, B (x): $2x > 5$, C(x) : „ x je deliteľom dvanástich“.**
Aké obory pravdivosti majú :
a) $A(x) \wedge B(x)$ b) $A(x) \vee C(x)$ c) $B'(x)$ d) $B'(x) \wedge C'(x)$

67. **Daná je výroková forma AX = BX. Ako sa líšia obory pravdivosti tejto výrokovej formy, ak si zvolíme rôzne obory premennej X; napr. priamku AB, Rovnostranný trojuholník ABC, rovinu ABC, priestor.**

68. **Narysujte kosoštvorec ABCD a uhlopriečkou BD , $|BD| = |AB|$. Nech S je stred uhlopriečky BD a T je ťažisko trojuholníka ABD. Rozhodnite, ktoré zo zostrojených bodov sú prvkami oboru pravdivosti výrokovej formy V (x) : $|AX| = 2.\ |SX|$, kde X je ľubovoľný bod roviny ABC. Odhadnite, ktorý geometrický útvar je oborom pravdivosti uvedenej výrokovej formy.**

69. **Množiny môžu byť dané udaním výrokovej formy, ktorej oborom pravdivosti je uvažovaná množina. Prečítajte nasledujúce zápisy a určte ktorú z týchto množín možno vyjadriť vymenovaním všetkých jej prvkov:**
a) $A = \{ x \in N;\ x^2 < 20 \}$ b) $B = \{ x \in N;\ x < 5 \wedge x \geq 2 \}$ c) $A = \{x \in R;\ 2x-13 = x+5-(18-x) \}$

70. **Vyznačte na číselnej osi tieto množiny:** a) $A = \{ x \in R;\ x^2 < 1 \}$ b) $B = \{ x \in R;\ \sqrt{x} = 3 \}$
c) $C = \{ x \in R;\ x > 1 \wedge x \leq 3 \}$ d) $D = \{ x \in R;\ x < 2 \vee x > 8 \}$

Na záver (úlohy z prijímacích skúšok na právnické fakulty- použitie teórie výrokov a množín)

71. **Ktorá z nasledujúcich viet je negáciou vety**

- „ Každý smie byť podrobený výsluchu .“
  - Niekto smie byť podrobený výsluchu.
  - Všetci smú byť podrobení výsluchu.
  - Niekto nesmie byť podrobený výsluchu.
  - Žiadny nesmie byť podrobený výsluchu

- „ Žiadne právo premlčaním nezaniká .“
  - Niektoré práva premlčaním zanikajú.
  - Niektoré práva premlčaním nezanikajú.
  - Všetky práva premlčaním zanikajú.
  - Všetky práva premlčaním nezanikajú

- „ Niektoré osoby majú právo na ochranu .“
  - Niekto má právo na ochranu.
  - Žiadne osoby nemajú právo na ochranu ..
  - Všetky osoby majú právo na ochranu ..
  - Nikto nemá právo na ochranu .

- „ Ak nie sú povinnosti splnené, môžu byť vynútené .“
  - Ak sú povinnosti splnené, nemôžu byť vynútené.
  - Povinnosti nie sú splnené a nemôžu byť vynútené
  - Povinnosti nemôžu byť splnené ani vynútené.
  - Nesplnené povinnosti môžu byť vynútené .

72. **Ktoré z nasledujúcich viet vyplývajú z týchto tvrdení(** predpokladáme, že všetky pojmy sú neprázdne) (*inšpirácia na štúdium teórie množín*)

- „ Všetci ľudia sú subjekty práva .“
  „ Žiaden človek nie je právnickou osobou.“
  - Niektorí ľudia nie sú subjekty práva.
  - Každý človek je právnickou osobou.
  - Niektorí ľudia sú subjekty práva.
  - Všetky subjekty práva nie sú právnickou osobou.

- „ Všetci občania SR sú ľudia .“
  „ Niektorí občania SR majú volebné právo.“
  - Niektorí ľudia nemajú volebné právo.
  - Niektorí ľudia majú volebné právo.
  - Každý občan SR má volebné právo.
  - Žiaden občan SR nemá volebné právo.

- „ Všetky samosprávne celky sú právnické osoby .“
  „ Každý samosprávny celok môže vlastniť majetok.“
  - Všetky právnické osoby môžu vlastniť majetok.
  - Niektoré právnické osoby môžu vlastniť majetok.
  - Žiadna právnická osoba nesmie vlastniť majetok.
  - Niektorý samosprávny celok môže vlastniť majetok.

Množiny

<u>Množinou</u> rozumieme súhrn, súbor objektov*(Ako východiskový pojem ju nedefinujeme)*
Množinu určíme tým, že presne vymedzíme, ktoré objekty do nej patria (a ktoré nepatria). Skutočnosť, že objekt x patrí do množiny A zapisujeme symbolicky $x \in A$. Opačné tvrdenie zapisujeme $x \notin A$.
<u>Určenie množiny:</u> ***1. vymenovaním všetkých jej prvkov*** *(len pri konečných množinách)*
2. udaním charakteristickej vlastnosti prvkov (napr. pomocou výrokovej formy)
3. množinovými operáciami s inými množinami

Zápisy množín: ***A=*** $\{1, 2, 4, 7\}$, ***A=*** $\{x \in A;\ x<5\}$, ***A=*** $N \cup I$
Ak množina A neobsahuje žiaden prvok, hovoríme že je prázdna. Prázdna množina sa označuje znakom ∅, t.j. A=∅

1. Prečítajte tieto zápisy: a) $\{x \in N;\ x^2 < 10\}$ b) $\{x \in N;\ x < 5 \wedge x \geq 2\}$ c) $\{x \in R;\ 2x-13=x+5-(18-x)\}$.
   Ktorú z týchto množín možno vyjadriť vymenovaním všetkých jej prvkov?

2. Vyznačte na číselnej osi tieto množiny: a) $\{x \in R;\ x^2 < 1\}$ b) $\{x \in R;\ \sqrt{x} = 3\}$
   c) $\{x \in R;\ x > 1 \wedge x \leq 3\}$ d) $\{x \in R;\ x < 2 \wedge x > 8\}$

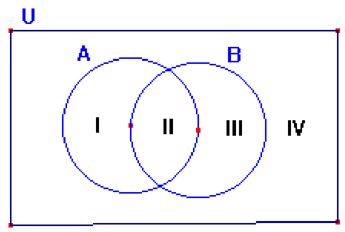
3. Narysujte v rovine π_2 štvorec ABCD a zakreslite tieto množiny bodov roviny:
   a) $\{X \in \pi_2;\ |AX| = |CX|\}$ b) $\{X \in \pi_2;\ |AX| = |AB|\}$
   c) $\{X \in \pi_2;\ |CX| \leq |CA|\}$ d) $\{X \in \pi_2;\ |AB| < |AX| < |AC|\}$

4. Zapíšte symbolicky:
   a) množinu všetkých prirodzených čísel, ktoré sú väčšie než 29 a menšie než 33
   b) množinu všetkých celých čísel, ktoré sú násobkami piatich
   c) množinu všetkých reálnych čísel, ktorých druhá mocnina je menšia než ich trojnásobok
   Zvoľte si premenné a zostavte výrokové formy, vyjadrujúce charakteristickú vlastnosť prvkov množín.

<u>Vennove diagramy</u> sú grafické schémy, na ktorých modelujeme niektoré základné množinové situácie.

Vennov diagram pre dve množiny:
Jednotlivé polia diagramu znázorňujú: U je základná množina objektov, s ktorou pracujeme

I...... $\{x \in U;\ x \in A \wedge x \notin B\}$
II..... $\{x \in U;\ x \in A \wedge x \in B\}$
III.... $\{x \in U;\ x \notin A \wedge x \in B\}$
IV.... $\{x \in U;\ x \notin A \wedge x \notin B\}$



5. Nakreslite Vennove diagramy na znázornenie množín:(Políčka, ktoré zostanú prázdne označte ∅)
   a) $A = \{2,8,1\}$, $B = \{1, 3, 6, 7\}$ b) $A = \{3, 5, 7,8\}$, $B = \{4, 2\}$
   c) $A = \{6, 2, 5, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ d) $A = \{2,5,1,7\}$, $B = \{1, 2, 5, 7\}$
6. Do Vennovho diagramu pre tri množinyA,B,C zakreslite
   a) objekt t, ktorý je prvkom množiny A, ale nie je prvkom ani B ani C
   b) objekt v, ktorý patrí množine B aj C, ale nie je prvkom A
   c) objekt w, ktorý je prvkom množiny C, ale nie je prvkom ani A ani B
   d) objekt y, ktorý nie je prvkom žiadnej z množín A,B,C
   e) objekt z, ktorý je prvkom vštkých troch množín.
7. Nakreslite Vennov diagram pre množiny D,T,P a zakreslite všetky ich prvky, keď
   $D=\{n \in N;\ n^2 < 30\}$, $T=\{x \in N;\ 4|x \wedge x < 10\}$, $P=\{2, 3, 8, 9\}$

<u>Operácie s množinami</u>

<u>Doplnok množiny A v množine</u> U tvoria všetky prvky z množiny U, ktoré nie sú prvkami množiny A *(* U je základná množina)

Označujeme** A'_U, ak je jasné o akú základnú množinu ide píšeme skrátene **A′

$x \in A' \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x \in U\ ;\ x \notin A$, alebo $A' = \{x \in U;\ x \notin A\}$

<u>Zjednotenie množín</u> $x \in A \cup B \overset{def}{\Leftrightarrow} x \in A \vee x \in B$ alebo $A \cup B = \{x \in U;\ x \in A \vee x \in B\}$

<u>Prienik množín</u> $x \in A \cap B \overset{def}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge x \in B$ alebo $A \cap B = \{x \in U;\ x \in A \wedge x \in B\}$

<u>Rozdiel množín</u> $x \in A - B \overset{def}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge x \notin B$

Vlastnosti operácií s množinami:

$A \cup A = A$, $A \cup B = B \cup A$, $A \cup \emptyset = A$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$

$A \cap A = A$, $A \cap B = B \cap A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A - A = \emptyset$, $A - \emptyset = A$, $\emptyset - A = \emptyset$, $A - B \subset A$, ak $A \neq B$, tak $A - B \neq B - A$,

$(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$, $A - B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B$

$A'_U = U - A$ $A' \cap A = \emptyset$ $A' \cup A = U$ $\emptyset' = U$ $U' = \emptyset$

$(A')' = A$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$ $A - B = A \cap B'$

8. Na Vennovom diagrame pre dve množiny A,B vyšrafujte práve tie polia, ktoré obsahujú prvky oboru pravdivosti týchto výrokových foriem:
   a) $x \in A \vee x \in B$ b) $x \in A' \vee x \in B'$ c) $(x \in A \wedge x \in B)'$
   d) $x \in A \wedge x \notin B$ e) $(x \in A \wedge x \notin B)'$ f) $x \in A \Rightarrow x \in B$
   g) $(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A' \wedge x \in B')$ h) $(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)$

9. Na Vennovom diagrame pre tri množiny A,B,C vyšrafujte práve tie polia, ktoré obsahujú prvky oboru pravdivosti výrokových foriem
   a) $x \in A \wedge x \in B$ b) $x \notin A \wedge x \notin B$ c) $x \in A \vee x \in B$
   d) $(x \notin A \wedge x \in B) \vee x \in C$ e) $(x \in A \wedge x \in C) \vee x \notin C$

10. Na Vennovom diagrame pre tri množiny A,B,C vyšrafujte oblasti, ktoré znázorňujú tieto množiny:
    a) $(A \cup B) \cap C$ b) $(A \cap B) \cup C$ c) $(A' \cap B') \cup (A \cap B)$ d) $(A' \cap C) \cup (B \cap C')$

<u>Vzťahy medzi množinami</u>

<u>Rovnosť množín</u>

$A = B \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x \in U\ ;\ x \in A \Leftrightarrow x \in B$ *(množiny A, B sa rovnajú práve vtedy, keď každý prvok množiny A je prvkom množiny B a každý prvok množiny B je prvkom množiny A)*

<u>Pre rovnosť množín platí:</u> $A = A$, $A = B \Leftrightarrow B = A$, $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$

<u>Množinová inklúzia:</u> ***A je podmnožinou B***

$A \subset B \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x \in U\ ;\ x \in A \Rightarrow x \in B$

Vlastnosti inklúzie: $A \subset A$, $(A \subset B \wedge B \subset A) \Leftrightarrow A = B$, $(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \subset C$,

$\emptyset \subset A$ *(t.j. prázdna množina je podmnožinou každej množiny)*

11. Nakreslite Vennove diagramy pre dve množiny v ktorých nakreslite vzťah rovnosti dvoch množín a vzťah inklúzie

12. Nakreslite Vennove diagramy pre obory pravdivosti výrokových foriem : **A(x): $8|x \wedge x \in U$**, **B(x): $4|x \wedge x \in U$,** ak základnou množinou je množina U :
    a) $U = \{x \in N;\ x < 20\}$ b) $U = \{x \in N;\ x \leq 7\}$ c) $U = \{x \in N;\ x < 4\}$
    Zakreslite všetky prvky množiny U, prázdnosť polí diagramu označte znakom $\emptyset$. Čo môžete povedať o vzťahoch medzi dvojicami množín A, B v prípadoch a),b), c).

13. Sformulujte výroky o vzťahoch medzi množinami A,B, ktoré sú skryté v nasledujúcich vetách, v ktorých písmeno a označuje ľubovoľný prvok množiny A a písmeno b ľubovoľný prvok množiny B. Nakreslite príslušné Vennove diagramy.
    a) Každé a je b. b) Niektoré a sú b. c) Žiadne a nie je b. d) Niektoré a nie sú b

14. Podľa predchádzajúcej úlohy vyjadrite množinový zmysel týchto viet:
    a) Každý vojak je pešiak b) Každá fľaša je nádoba.
    c) Niektorí učitelia sú matematici. d) Žiadny byt v tomto dome nie je bez kúpelne

15. Vlastnosti operácií s množinami overte pomocou Vennových diagramov.

16. Rozhodnite, či pre ľubovoľné podmnožiny A,B danej základnej množiny U platí:
    a) $A \cup (A \cap B) = A$ b) $A \cap (A \cup B) = A$ c) $A \cap (A \cup B) = B$
    d) $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$ e) $(A \cap B') \cup B = A \cup B$ f) $A' \cup B' = (A \cup B)'$
    g) $(A \cup B) \cap B' = A \cap B'$ h) $A \cup B = (A \cap B') \cup (A \cap B)$ k) $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B)$

17. Overte pomocou Vennových diagramov, že pre ľubovoľné podmnožiny A, B, C základnej množiny U platí:
    a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
    c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

18. Rozhodnite, či pre ľubovoľné podmnožiny A, B, C základnej množiny U platí:
    a) $A \cap (B \cup C)' = (A \cap B') \cap (A \cap C')$ b) $A \cup (B \cap C') = [(A \cup B) \cap (A \cup C')] \cup (A \cap C')$
    c) $(A \cup B) \cap C' = (A \cap C') \cup (B \cap C')$ d) $C' \cap (A \cap B) = (A \cap C') \cap (C' \cap B)$
    e) $(A \cup B) \cap (A \cup C') = A \cup (B \cap C')$ f) $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C') = A \cap B$
    f) $(A \cap B) \cup (A \cap C) = C \cup A$ g) $(A \cap C) \cup (C \cap B) = C \cap (B \cup A)'$

19. Zjednodušte nasledujúce zápisy množín:
    a) $M \cup (N \cap M')$ b) $(M \cup N') \cap (N \cup M)$ c) $(P \cap A) \cup A)$
    d) $(P' \cup S') \cup (S \cup P')$ e) $(B \cup C) \cap (B' \cap C')$ f) $(A' \cap K')' \cap (K' \cup A')'$
    g) $[(M \cup N) \cap N] \cup [M \cap (M \cap N)]$ h) $(S \cap P \cap R) \cup [P \cap (S' \cup R)']$

20. Určte vymenovaním prvkov množiny X, Y, ktoré spĺňujú tieto podmienky:
    a) $X \subset \{3, 6, 7, 8, 9\} \wedge X \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \wedge Y \subset \{3, 4, 5, 6, 7\} \wedge \{3, 6\} \subset X \wedge \{3, 4, 7\} \subset Y \wedge \{5, 6, 7\} \subset Y$
    b) $X \subset \{1, 2, 3, 5, 6, 9\} \wedge Y \subset \{2, 3, 4, 5, 8\} \wedge X \cap Y = \{5\}$
    c) $X \cup Y = \{3, 5, 6, 8\} \wedge X \cap \{4, 6, 8\} = \emptyset \wedge Y \cap \{1, 3, 5, 7\} = \{3, 5\}$
    d) $X \cap Y = \emptyset \wedge X' \cap Y = \{3, 5, 7\} \wedge X \cap Y' = \{2, 4, 6, 8\}$
    e) $X \cap Y = \{2, 6, 7\} \wedge X \subset \{5\}' \wedge Y \subset \{1, 3, 4, 6, 7\}$

21. Určte množiny X, Y tak, aby platilo: $X \cap Y = \emptyset \wedge X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ a ku každému $a \in X$ existuje $b \in Y$ tak, že $b = a+4$.

22. Určte podmnožiny X, Y množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, pre ktoré platí:
    $X = \{2, 6, x, y\}$, $Y = \{2, x, z, u\}$, $X \cap Y' = \{3, 6\}$, $X' \cap Y = \{1, 4\}$

23. Označme $M = \{1, 2, \ldots\ldots\ldots.20\}$, P- prvočísla z množiny M, N- nepárne čísla z M, T- čísla z M, ktoré sú deliteľné tromi. Vypíšte prvky množín:
    a) $N'_M - (T - (P'_M \cap N))$ b) $M - [(T'_M \cap N)'_N \cup N'_M]$
    c) vyjadrite množinu $A = \{2, 6, 12, 18\}$ pomocou množín M, P, N, T a základných množinových operácií .